الجداء المباشر لجبور لي

مبرهنة:

ليكن A_1, A_2 جبري لي فوق الحلقة R عندئذ

① المجموعة $B_1 = \{(a,0) : a \in A_1\}$ تشكل جبر لي جزئي في $A_1 \times A_2$

② المجموعة $B_2 = \{(0,b) : b \in A_2\}$ تشكل جبر جزئي في $A_1 \times A_2$

البرهان:

$$0 \in A_1 \Rightarrow (0,0) \in B_1 \neq \phi$$

- $\forall (a,0), (b,0) \in B_1 \quad a, b \in A_1$

$$(a,0) - (b,0) = (\underbrace{a-b}_{\in A_1}, 0) \in B_1$$

- $\forall \alpha \in R$

$$\alpha(a,0) = (\underbrace{\alpha a}_{\in A_1}, 0) \in B_1$$

B_1 فضاء جزئي

$\forall (a,0), (b,0) \in B_1$

$$[(a,0),(b,0)] = ([a,b],[0,0]) \in B_1$$

B_1 جبر لي جزئي في $A_1 \times A_2$

② بنفس الطريقة

مبرهنة:

ليكن A_1, A_2 جبر لي فوق الحلقة R عندئذ

① المجموعة $B_1 \{(a,0) : a \in A_1\}$ تشكل مثالي في $A_1 \times A_2$

② المجموعة $B_2 \{(b,0) : b \in A_2\}$ تشكل مثالي في $A_1 \times A_2$

البرهان :
وجدنا أن المجموعة B تشكل جبري جزئي في $A_1 \times A_2$
لتكن d_a تطبيق اشتقاق معرف على $A_1 \times A_2$

$$d_a(B_1) \subseteq B_1 \;??\qquad \forall a \in A_1 \times A_2$$

$$\forall\, x \in B_1 \;;\; x = (c, 0) \;;\; c \in A_1$$

$$d_a(x) = [\underbrace{a}_{\in A_1 \times A_2}, x] = [(a_1, a_2), (c, 0)] = ([a_1, c], [a_2, 0])$$

$$([\underbrace{a_1, c}_{\in A_1}], 0) \in B_1$$

ومنه B_1 مثالي في $A_1 \times A_2$
وبنفس الطريقة

مبرهنة :
لتكن A_1, A_2 جبري منتهي على حقل F عندئذٍ
$$A_1 \times A_2 = B_1 \oplus B_2$$
حيث B_i هي المثاليات المعرفة في التمهيدية السابقة

البرهان :
لدينا $B_1 \dotplus B_2 \subseteq A_1 \times A_2$ مثالي في $A_1 \times A_2$ (مجموع مثاليين هو مثالي)
لتكن $(x, y) \in A_1 \times A_2$ عندئذٍ

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) \in B_1 \dotplus B_2$$

ومنه

$$A_1 \times A_2 = B_1 + B_2$$

لتكن $(a_1, a_2) \in B_1 \cap B_2$

$$\left.\begin{aligned} (a_1, a_2) \in B_1 &\Rightarrow a_2 = 0 \\ (a_1, a_2) \in B_2 &\Rightarrow a_1 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (a_1, a_2) = (0, 0)$$

وبالتالي $A_1 \times A_2 = B_1 \oplus B_2$

مبرهنة

ليكن $A_1 \times A_2$ جبري مور وحقل F عندئذٍ

① $B_1 \cong B_1 \oplus \{0\}$

$B_2 \cong \{0\} \oplus B_2$

البرهان:

نعرف علاقة $f: B_1 \longrightarrow B_1 \oplus \{0\}$

$\forall a \in B_1 \quad f(a) = (a, 0)$

واضح أن f تقابل متباين وغامر

$\forall a, b \in B_1 \quad f(a+b) = (a+b, 0) = (a, 0) + (b, 0)$
$= f(a) + f(b)$

$\forall \alpha \in R \quad f(\alpha a) = (\alpha a, 0) = \alpha (a, 0) = \alpha f(a)$

$f([a,b]) = ([a,b], 0) = ([a,b], [0,0])$

$= ([a,0], [b,0]) = f_1$

$f_2 = [f(a), f(b)] = [(a,0), (b,0)] = ([a,b], [0,0])$

وبالتالي $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$

$\Leftarrow$ f تشاكل

$B_1 \cong B_1 + \{0\}$

مبرهنة:

ليكن A جبرياً فوق الحقل F و I , J مثاليين في A عندئذٍ

$$I \times J = I \oplus J$$

البرهان

نعرف العلاقة $f : I \times J \longrightarrow I \oplus J$

$\forall (a, b) \in I \times J ;\ f((a, b)) = a + b$

واضح أن f تقابلية

$\forall\ x, y \in I \times J \quad x = (x_1, x_2) \quad x_1, y_1 \in I$

$\qquad\qquad\qquad\qquad y = (y_1, y_2) \quad x_2, y_2 \in J$

$f(x+y) = f((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) = f(x_1 + y_1, x_2 + y_2)$

$= (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) \in I \oplus J$

$f(x) + f(y) = f(x_1, x_2) + f(y_1, y_2) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)$

$= (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) \in I \oplus J$

$\Rightarrow f(x+y) = f(x) + f(y)$

$\forall \alpha \in F \quad f(\alpha x) = f(\alpha(x_1, x_2)) = f(\alpha x_1, \alpha x_2)$

$= \alpha x_1 + \alpha x_2 = \alpha (x_1 + x_2)$

$= \alpha f(x)$

$f([x,y]) = f([(x_1,x_2),(y_1,y_2)]) = f([x_1,y_1],[x_2,y_2])$

$= [x_1,y_1] + [x_2,y_2]$

$L_2 = [f(x), f(y)] = [f(x_1,x_2), f(y_1,y_2)]$

$= [x_1+x_2, y_1+y_2] = [x_1,y_1] + [x_2,y_2]$

$\Rightarrow f([x,y]) = [f(x), f(y)]$

$\Leftarrow f$ تشاكل

استحقيت الجائزة

جيد